

## MODELOS Y PROTOTIPOS

¿Qué es un modelo?

*Una reproducción a escala de una situación o de un elemento...*

A escala, reducido en tamaño

¿Qué es un prototipo?

A escala 1 a 1, el primer elemento de tal naturaleza que se realiza a la escala que corresponde de manera más bien definitiva.

¿Por qué hacemos modelos y no los prototipos?

Costos, tiempo, etc...

Pensemos en un buque, si hacemos el buque a tamaño natural y no funciona bien, sería un desastre económico, entonces mejor hacer pruebas en un buque a escala que tiene un costo muchísimo mejor, pero que permite hacer previsible el funcionamiento del prototipo posterior,

Por ahí yo he leído que en la antigüedad, antes que se usaran los modelos, cuando se construía un buque, los primeros que lo navegaban eran los constructores, de tal manera que si se hundía los hacían con todos los que lo habían hecho y de este modo tenían más cuidado en fabricar las cosas bien, pero era bastante azarosa ....

Un caso de bastante conocimiento, un buque sueco “el Vasa”<sup>a</sup> que en la bahía de Estocolmo se hundió con un pequeño viento e iba con los carpinteros y sus familias, hace unos años atrás fue rescatado y lo tienen conservado. Solo navegó algunos metros por estar mal construido

Pensemos en obras más grandes, represas, obras portuarias... de todas esas se construyen modelos y retrata de predecir que es lo que va a pasar con el prototipo.

Ahora. se hacen ensayos, pero hay que tener una metodología para saber que pasa en los ensayos, supongamos que un fenómeno depende de tres elementos,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$ , si yo quiero hacer un ensayo y poder distinguir cómo cada uno de estos factores influye, tengo que ir cambiando de uno a la vez, porque si los cambio todos, no se cual de ellos fue el que produjo el efecto que voy a observar. Entonces, si voy a

---

<sup>a</sup> El 10 de agosto de 1628, varios barcos de guerra reales se hicieron a la mar desde el puerto de Estocolmo. El de más envergadura era el recién construido *Vasa*, que recibió su nombre de la dinastía reinante. Para conmemorar tan solemne ocasión, se dispararon salvas de honor desde sus cañones. Cuando el buque se deslizaba lentamente hacia la bocana del puerto, una repentina ráfaga de viento comenzó a soplar. El *Vasa* se escoró, pero logró corregir su rumbo. Una segunda ráfaga golpeó el costado del barco. El agua comenzó a entrar por las cañoneras y el *Vasa* se fue a pique. Al menos 30 miembros (quizá 50) de un total de 150 que componían la tripulación se ahogaron. El *Vasa* tardaría 333 años en volver a ver la luz.

[www.vasamuseet.se/InEnglish/international/Spanish.aspx](http://www.vasamuseet.se/InEnglish/international/Spanish.aspx)

analizar algo tengo que tener un número de muestras suficientemente grande, para que genere distintas estadísticas.

Pongamos un número de diez ensayos para que sea un cálculo fácil, tengo que tener de la primera variable diez condiciones distintas, supongamos que sea la densidad, diez líquidos de distintas densidades, esto podría ser relativamente fácil, pero después que tengo esas diez densidades ya tengo que cambiar el segundo factor, para éste tengo que tener diez para cada una de las densidades anteriores, vale decir 100 ensayos, y si agrego las diez variables del tercer factor llegaría a los 1000 ensayos. Este último es un número bastante grande, y sólo hemos puesto tres variables,

¿Que pasaría por ejemplo en el caso de tener 7 variables? Diez millones de ensayos.

Y se produce otra situación, por ejemplo encontrar un fluido que tengan la misma densidad y diez distintas viscosidades, o diez distintas tensiones superficiales. Además de ser un número de ensayos excesivamente grande es sumamente complejo llevar a cabo las distintas condiciones,

Para solucionar esto se ha descubierto un procedimiento, que es el “análisis dimensional”, que está asociado con las “semejanzas dinámicas”. Esto es una herramienta que me permite agrupar las variables que se tienen, de tal manera que se convierten en otras variables, disminuyendo la cantidad de éstas. Además que de cada ensayo, éste debe ser analizado, tablas, curvas... etc para llegar a una conclusión.

¿Que es la escala?

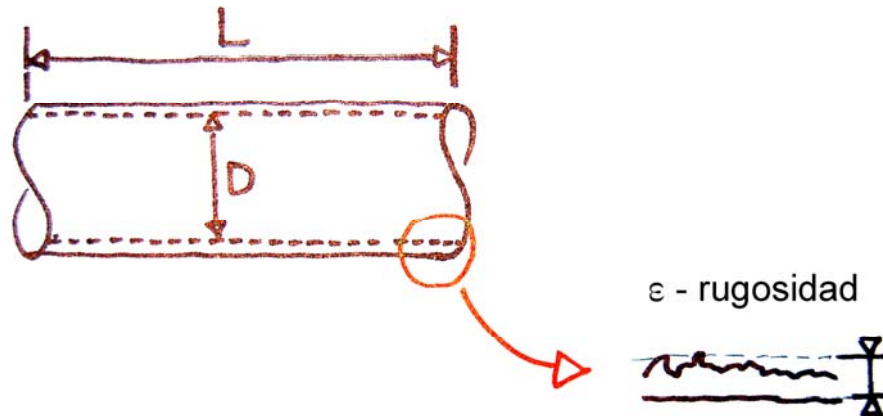
un parámetro adimensional, por que es la longitud del modelo en relación a la dimensión del prototipo, longitud partido por longitud, sin dimensión.

Qué me permite eso, generalizar una situación. Entonces del análisis dimensional nacen los parámetros adimensionales,

Con los parámetros se generalizan situaciones y podemos reducir el número de variables,

Luego, si se cumplen algunos requisitos con éstos parámetros vamos a tener una semejanza dinámica, lo que significa que el modelo no sólo es una reducción a escala del prototipo, sino que se comporta en forma semejante, que permita extrapolar los resultados obtenidos del modelo al prototipo.

**EJEMPLO:**



La clase pasada veíamos la viscosidad, que tenía que ver con el esfuerzo de corte, y el esfuerzo de corte es roce, entonces, si yo tengo una tubería y quiero saber los que sucede en el interior, cómo se comporta el fluido que está circulando por el interior, puedo decir, o buscar cuales son las variable que yo creo que intervienen en el proceso al interior.

Entonces, para buscar estas variables, debo hacerlos de manera ordenada

VARIABLE GEOMÉTRICAS	VARIABLES CINEMÁTICAS	VARIABLES DINÁMICAS (relación velocidad con fuerza)
Longitud, área, volúmenes, momento de inercia	Velocidad, aceleraciones, velocidad rotacional, velocidad angular, caudal másico, caudal volumétrico.	-Propiedades del fluido densidad, viscosidad, tensión superficial,
Ej: $D, L, \epsilon$	Ej: $V$	Ej: $\mu, \rho$
		- Características de comportamiento potencia, torque, h perdida, etc.
		Ej: h per. (perdida de carga)

Para este caso tenemos siete variables (o sea que si tomáramos diez condiciones distintas de cada unos, el resultado sería 10000000 de ensayos distintos).

Usando el análisis dimensional, enunciarnos que se cree que la pérdida de carga es una función del diámetro, de la longitud, de la rugosidad, de la velocidad, de la densidad y de la viscosidad,

$$h_{\text{per.}} = f(D, L, \varepsilon, V, \rho, \mu)$$

Luego tengo que encontrar la función que aúne todos estos parámetros.

Cuántas **dimensiones físicas** existen,

La longitud, tiempo, masa, temperatura, tensión eléctrica, luminosidad

L, T, M,  $\theta$ , V, I, iluminación

Con esas siete dimensiones nosotros formamos todos los conceptos que queremos

Entonces tenemos un teorema llamado  $\pi$  de Buckingham, que dice que con las variables que se tienen se puede formar un grupo de parámetros adimensionales, regido de la siguiente manera.

		L	M	T
D		1	0	0
L		1	0	0
$\varepsilon$		1	0	0
V		1	0	-1
$\rho$		-3	1	0
$\mu$		-1	1	-1
h per		2	0	-2

En este caso se utilizan tres de las siete dimensiones básicas, luego puedo decir que: **El N° de parámetros adimensionales que voy a obtener con las siete variables es igual al número de variables menos las dimensiones utilizadas, o sea:**

$$7-3=4$$

Puedo obtener 4 parámetros adimensionales:  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  y  $\pi_4$ ,

$$\begin{aligned} \pi_1: & \rho^a V^b D^c L^1 \\ \pi_2: & \rho^d V^e D^f \varepsilon^1 \\ \pi_3: & \rho^g V^h D^1 \mu^j \\ \pi_4: & \rho^x V^y D^z h p^1 \end{aligned}$$

Se debe tener un poco de cuidado al elegir las variables que intervienen, vamos a decir, que dentro de los cuatro parámetros con las siete variables tengo que repetir tres variables en cada uno, cuales son las que voy a repetir?. También podría ver las que no voy a repetir.

- La incógnita que me interesa despejar es  $h_{per}$ , por lo tanto no la voy a repetir, pues me interesa dejarla en una sola expresión lo más simple posible para poder despejarla matemáticamente.
- Tampoco voy a repetir la viscosidad ( $\mu$ )
- Me quedan las cuatro primeras que son longitudes, y la velocidad y densidad, primero ocupas estas dos en todas los parámetros
- El diámetro es bastante importante si que lo repito en todas
- Luego la cuarta variable en cada expresión van a ser las que no se han repetido, longitud, rugosidad, viscosidad y  $h_{pérdida}$ .

Para que cada una de estas expresiones **no tenga dimensión**, quiere decir que cada uno de estos elementos tiene que estar elevado a un exponente tal que la combinación, el producto, de estos parámetros haga que su dimensión sea cero.

Entonces voy a elevar a las incógnitas a, b, c y voy a dejar una incógnita con 1. Luego d, e, f y. En la tercera expresión voy a cambiar y dejar el valor D elevado a uno y  $\mu$  elevado a j, porque esta expresión ya la conozco y me permite seleccionar parámetros conocidos, lo que me evita hacer ensayos sobre eso.

Vamos a partir con  $\pi_1$

$$\pi_1: \quad \rho^a V^b D^c L^1 \\ L^{-3a} M^a L^b T^{-b} L^c L^1 = M^0 L^0 T^0$$

Me dice que la densidad ( $\rho = M/L^3 = M L^{-3}$ ) es elevado a uno, la densidad es  $L^{-3} M$ , pero cómo estamos elevando a "a" va ser  $L^{-3a} M^a$ . Luego multiplicamos por la velocidad ( $V = L/T = L T^{-1}$ ) que es una longitud por el tiempo elevado a menos uno, la distancia es una longitud y el largo es otra longitud. Luego, para que toda esta expresión sea adimensional debe ser igual a  $M^0 L^0 T^0$

$$\begin{aligned} \text{Para L:} \quad & -3a + b + c + 1 = 0 \\ \text{Para M:} \quad & a = 0 \\ \text{Para T:} \quad & -b = 0 \end{aligned}$$

Despejando me queda que:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= -1 \end{aligned}$$

Finalmente la expresión me queda despejada

$$\pi_1 = L^1 D^{-1} = L/D$$

Por el parentesco de las expresiones puedo decir de manera más rápida que:

$$\pi_2 = \varepsilon/D$$

$$\pi_3 = VD\rho/\mu$$

Para  $\pi_4$ :

$$\pi_4 = M^x L^{-3x} L^y T^{-y} L^z L^2 T^{-2} = L^0 M^0 T^0$$

$$\text{Para L: } -3x + y + z + 2 = 0$$

$$\text{Para M: } x = 0$$

$$\text{Para T: } -y - z = 0$$

Me queda que

$$x = 0$$

$$y = -2$$

$$z = 0$$

$$\pi_4 = h \text{ per}/V^2$$

Me queda que  $h \text{ per}/V^2$  es una función de los parámetros adimensionales  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  y  $\pi_3$

$$h \text{ per}/V^2 = f(L/D, \varepsilon/D, VD\rho/\mu)$$

Vale decir que si cada uno de estos lo tomo cómo una sola variable, entonces si quiero variar un factor puedo variar la velocidad, el diámetro, la densidad o la viscosidad. Lo que me permita jugar con las variables y buscar cuales son las que me cumplen con las condiciones difíciles de alcanzar, daba el ejemplo de un líquido con la misma densidad pero con distintas viscosidades, ahora no lo necesito, la viscosidad está en el enunciado pero puedo variar la velocidad y me varia el parámetro, o el diámetro, etc.

Bueno

Si realizáramos todos los ensayos de esto, llegaríamos a lo siguiente

$$h p = f(L/D) V^2/2$$

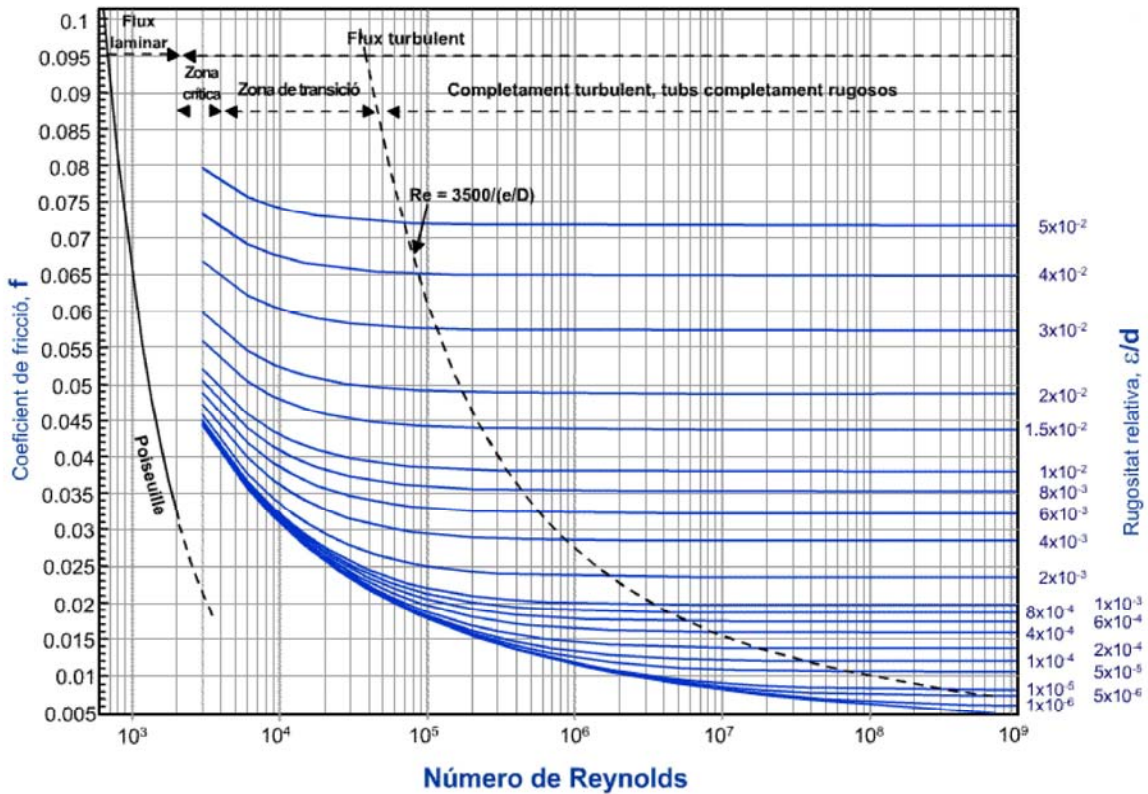
La pérdida es igual a un factor  $f$  [no es una función] multiplicado por  $(L/D)$  [lo ponemos entre paréntesis para recordarnos que es uno de los factores  $\pi$ ] por la velocidad al cuadrado medio, esto último representa la energía cinética por unidad de masa.

Entonces

Vamos a tener varias curvas

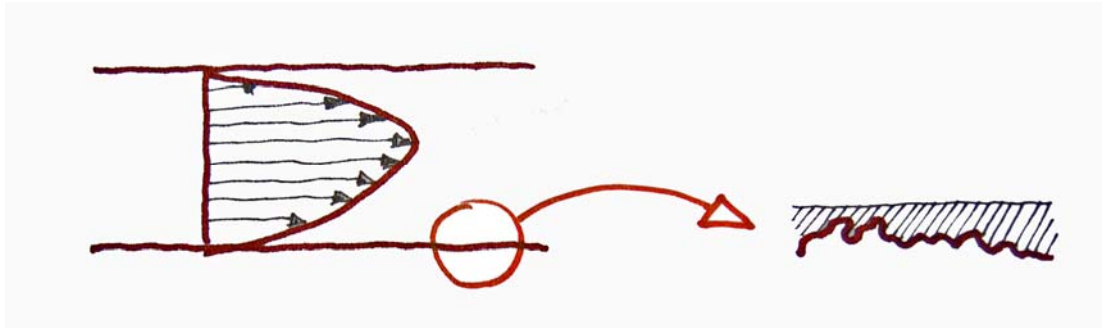
En la derecha,  $\epsilon/D$ , rugosidad relativa en función del diámetro, es un parámetro adimensional en que muchos diámetros distintos con muchas rugosidades distintas me van a dar los mismos cuocientes, el parámetro adimensional generaliza

## Diagrama de Moody

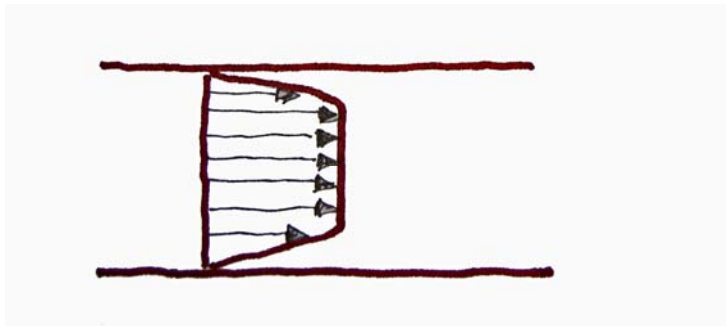


El factor que esta abajo es el número de Reynolds, y otorga ciertas características de cómo es el flujo al interior de la cañería:

- Si tengo un número de Reynolds bajo voy a decir que el flujo es laminar y el perfil de velocidad sería un paraboloide, que va desde una velocidad cero en los extremos a la máxima velocidad en el centro en que se comporta como si fuese un fluido ideal. Cuando el fluido es laminar, si miráramos microscópicamente en el extremos veríamos que el flujo esta detenido. El mismo fluido pavimenta el camino, entonces la fricción sólo depende del número de Reynolds.



- Si el flujo aumenta entonces el factor de fricción depende del número de Reynolds y de la rugosidad. En este caso tenemos un flujo turbulento



- Finalmente [en el lado derecho de la tabla] las líneas se muestran totalmente horizontales y ya no dependen del número de Reynolds, solo basta con la rugosidad relativa. En este caso el flujo es totalmente turbulento

## La capa Límite

Decíamos que en el caso del flujo laminar la capa límite ocupaba toda la sección del tubo. Y en el fluido turbulento una región muy pequeña, además en la zona central del tubo el fluido se comportaba como si no tuviera viscosidad

Si tomo un cuerpo que está sumergido en un fluido.

En la parte superior se encuentra lo que vamos a llamar velocidad infinita ( $V_\infty$ ), que vamos a decir es la velocidad a una distancia tal del objeto en que éste no interviene en la velocidad del fluido.

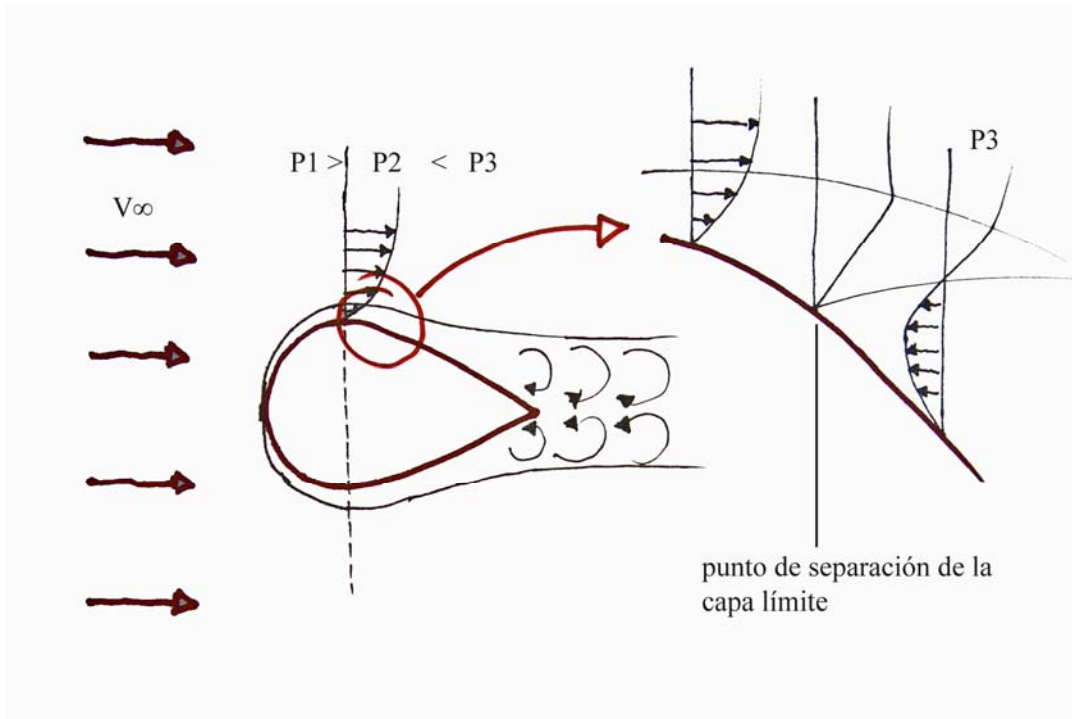
¿Qué pasa con el líquido, o el fluido, cuando llega a tomar contacto con el objeto?

Cuando veíamos el principio de viscosidad de Newton, veíamos que en el punto en que el fluido estaba en contacto con una superficie la velocidad era cero, y eso va a seguir siendo válido ahora.



Que sucede

El fluido toma contacto en una primera zona, se produce entonces una capa límite, primero muy delgada y luego va creciendo. En toda esta zona, capa límite, es donde la viscosidad actúa. En la parte de atrás se va a anchar bruscamente por ambos lados (arriba y abajo) formando la estela y una serie de turbulencias en la parte de atrás.



Si tomáramos el punto marcado y viéramos como es la distribución de las velocidades esta partiría en cero, llegaría al valor máximo y luego se distribuiría de manera uniforme, con un valor similar a la velocidad infinita. Por tanto la gradiente de velocidad se produce en la capa límite, y es ahí donde actúan todos los efectos de fricción.

Cuando queremos construir un objeto que sea aerodinámico o hidrodinámico, queremos que este tenga poca resistencia, ósea que su forma se tal que haga que la capa límite sea lo mas delgada posible. La capa límite no se puede evitar, pero si se puede hacer sea más delgada.

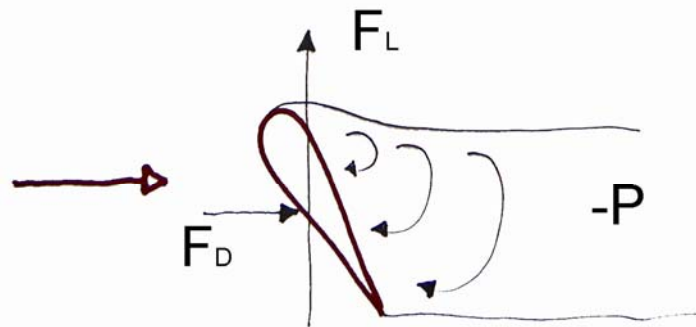
Hay un punto ubicado en la sección del ducto que empieza a disminuir en que produce la **separación de la capa límite**. Si nos fijamos la sección del ducto va cambiando y también la presión  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ , La presión en  $P_2$  va a ser menos que  $P_1$  por que la sección de paso del fluido es menor, o sea cuando se disminuye la sección de paso de un fluido va aumentar la velocidad a costa de disminuir la presión. Pero cuando llega al punto de máxima sección se invierte el proceso, la sección disminuye, o sea tenemos una  $P_3$  que es mayor que  $P_2$ , produciendo una presión adversa,

Podríamos decir que la presión adversa va contra la naturaleza del fluido, que siempre se mueve de mayor a menor presión, y en éste punto va a tender a devolverse. En la zona de la capa límite en la parte que hemos dibujado la  $P_3$  el perfil de velocidad va a tener una parte en sentido contrario, este es el punto de separación que va aumentando hacia atrás genera remolinos y turbulencia

Cuando uno observa entre las rocas en el estero, puede observar cómo el fluido produce turbulencias, a veces hay hojas flotando que quedan atrapadas dando vueltas por días, atrapadas en la separación de la capa límite.

Al construir un elemento hidrodinámico buscamos que la separación de la capa límite sea lo menos posible, lo más desplazada hacia el final, no es posible evitarla, solo disminuirla, el mejor buque va a ser el que genera una pequeña estela pegada al casco que se abre hacia atrás.

Esta separación se puede aprovechar cuando se inserta un objeto en un fluido con un cierto ángulo de ataque lo que se hace es producir una separación de la capa límite, que trae como consecuencia que la presión en la parte posterior sea menor, produciendo una fuerza de sustentación, que es la que levanta el objeto.



La sustentación ( $F_L$ ) es una fuerza perpendicular al flujo (en cualquier dirección, arriba, abajo o los lados, pero perpendicular) y el arrastre ( $F_D$ ) paralelo al flujo, éste último va a ser resistencia al avance.

Ambas fuerzas tienen que ver con todo lo que ocurre en la capa límite, con la fricción viscosa y también con la posición y separación de la capa límite.

En el ejemplo de la tubería recta decíamos que la fuerza de fricción genera una pérdida de carga que era una función:

$$h_p = f (L/D) V^2/2$$

Pero ésta es la fricción neta, viscosa. ¿Qué pasa si a la tubería le agregamos un codo?



La variación de distancia va a ser muy poca pero va a producir una pérdida equivalente a una gran cantidad de longitud de tubería.

El fluido que viene por la tubería por efecto de la inercia va a tender a seguir derecho, chocando contra la pared y luego retoma el camino, en esta zona se produce una separación de la capa límite, turbulencias y alteraciones.

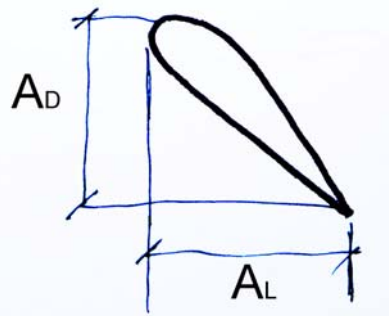
La pérdida de carga entonces va a depender del roce, por efecto directo de la viscosidad, y de manera indirecta por la separación de la capa límite. Ésta última va a ser mas importante en el caso del codo, pues en una pequeña sección de tubería produce una pérdida equivalente a una gran cantidad de tubería recta. Cuando se quiere generar bajas pérdidas de carga se utiliza una curva en lugar de un codo.

La fuerza de sustentación es un factor:

$$F_L = C_L \frac{\rho V^2}{2} A_L$$

El arrastre o fuerza resistente es un factor:

$$F_D = C_R \frac{\rho V^2}{2} A_D$$



En el dibujo anterior están representadas el área  $A_L$  por la proyección del objeto perpendicular al flujo que va a ser el área del arrastre, y el área  $A_D$  por la proyección paralela al flujo que es la que se utiliza para la fuerza de sustentación.

Entonces, para tener poco arrastre se debe tener poca área frontal ( $A_D$ ).

Luego la utilización de alabes asimétricos produce que la resistencia se poca por la menor área frontal, pero la geometría del objeto se produce el efecto deseado de separación fuerte arriba y por tanto sustentación con poca resistencia. Ejemplo de esto serían las alas de los aviones, palas de una turbina, etc.

Ambos coeficientes dependen de la forma del objeto y del ángulo de ataque (posición respecto al eje)

Existen algunos detalles

¿Qué producirá una capa límite mas delgada? Una superficie lisa o rugosa

Una superficie lisa, pero no siempre, en ocasiones la rugosidad hace que el flujo se torne turbulento en esa zona, produciendo que se mantenga delgada. Entonces va a depender de la velocidad, del número de Reynolds

Un ejemplo de esto sería la pelota ping pong con una de golf, en que a las velocidades en que se mueve cada una conviene que sea lisa en el caso del ping pong y rugosa para el golf.