ESTRUCTURAS I : CLASE 4 Introducción a la Estática : Fuerza, Análisis vectorial, Momento, Equilibrio

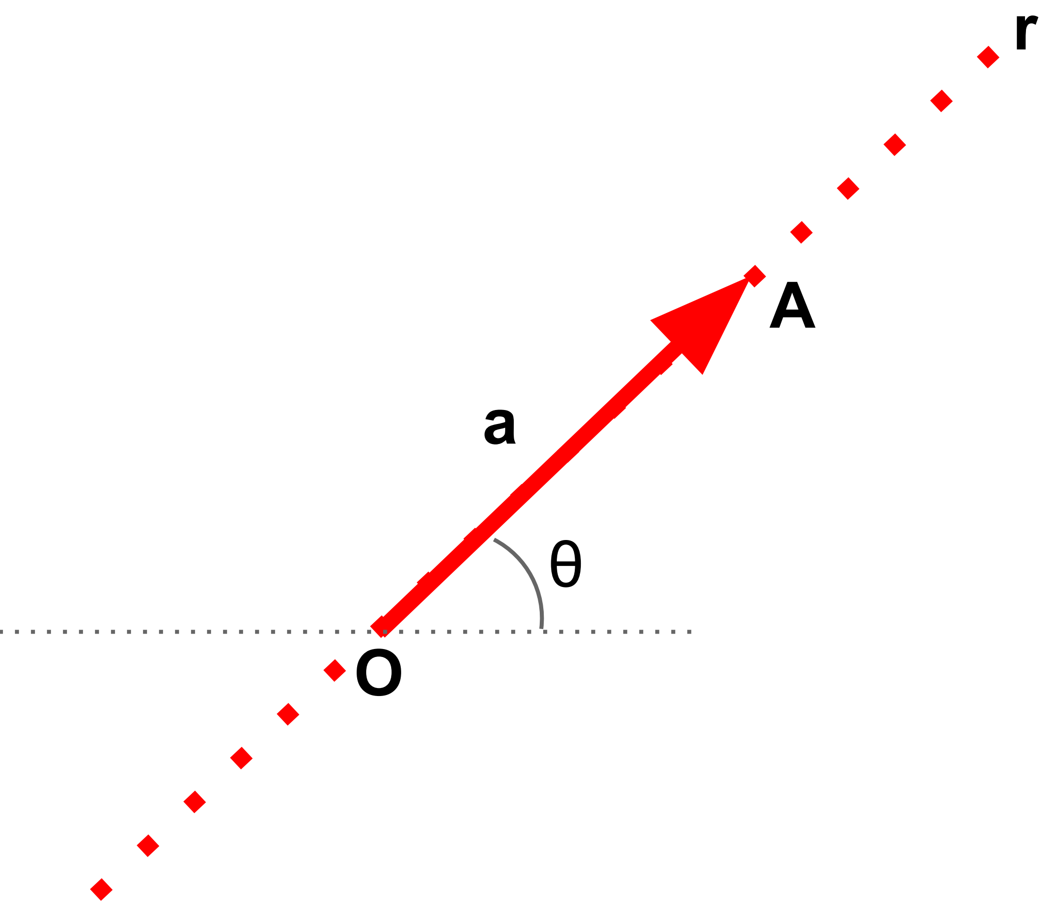
Guillermo A. Olivares Martínez

Arquitecto PUCV Mg.Estructuras UPC
guillermo.olivares@ead.cl

MAGNITUDES FÍSICAS VECTORIALES

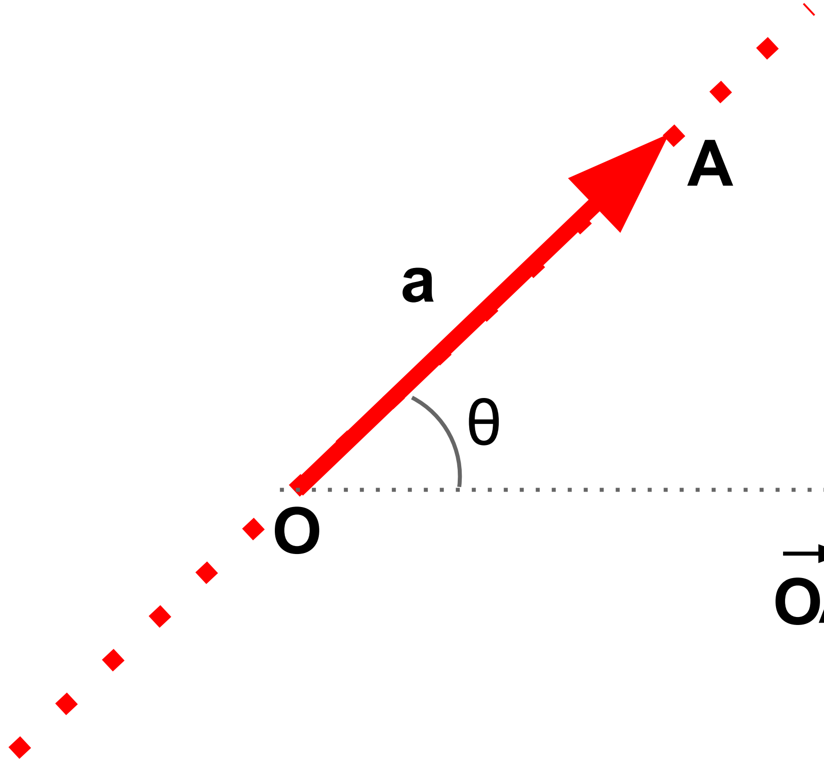
Son aquellas que quedan caracterizadas por una **cantidad** (intensidad o módulo), **una dirección y un sentido**. En un espacio euclidiano, de no más de tres dimensiones, un vector se representa mediante un segmento orientado.

Ej: Velocidad, Aceleración, Fuerza, Campo Eléctrico, Intensidad Luminosa, etc.

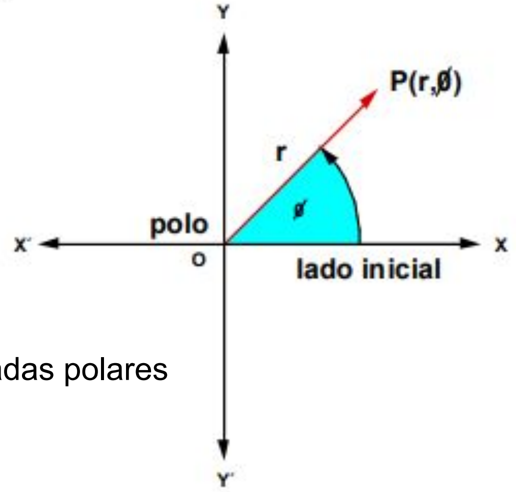


$\vec{OA}$	VECTOR
O	ORIGEN o Pto. Aplicación
A	EXTREMO
θ	DIRECCION
	SENTIDO
$\|a\|$	MODULO

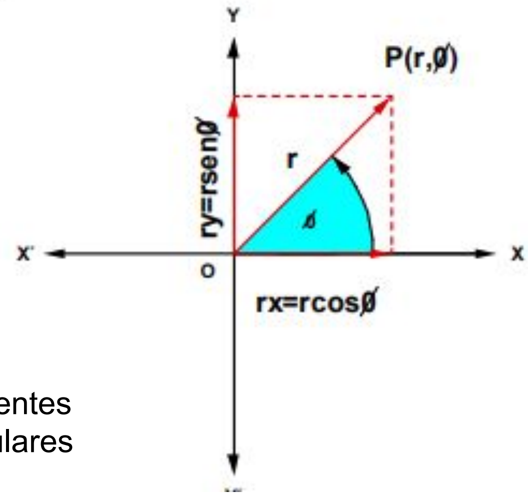
REPRESENTACIÓN POLAR



$\overrightarrow{OA}=a\theta$

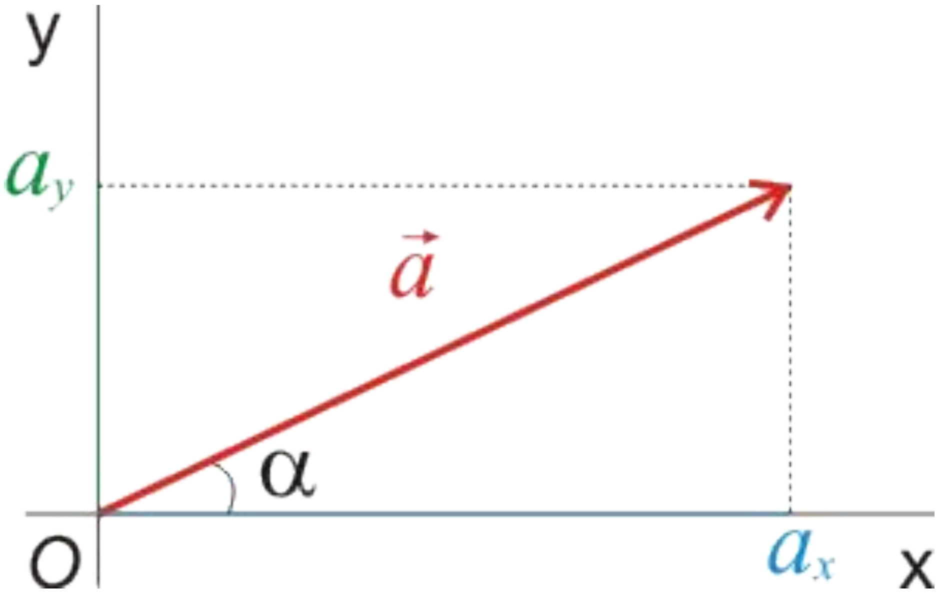


coordenadas polares



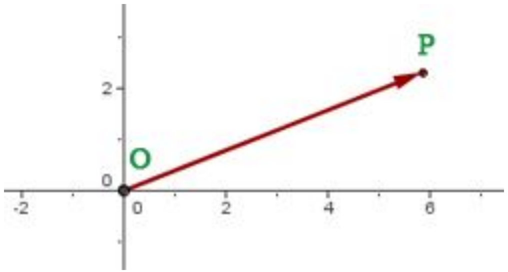
componentes
rectangulares

REPRESENTACIÓN DE VECTOR COORDENADAS RECTANGULARES



$$\overrightarrow{OA}=(a_x,a_y)$$

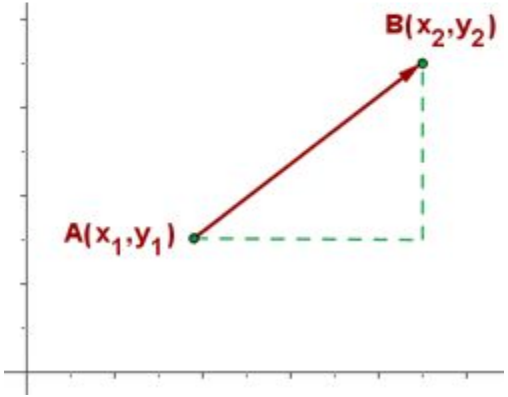
Las componentes cartesianas de un vector son las proyecciones de dicho vector sobre cada uno de los ejes.



VECTOR POSICIÓN

El vector que une el origen de coordenadas O con un punto P se llama vector de posición del punto P.

$\overrightarrow{OP}$



COMPONENTES DE UN VECTOR

Si las coordenadas de A y B son: $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$

Las coordenadas o componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas del extremo menos las coordenadas del origen.

Ejemplo:

Hallar las componentes de un vector cuyos extremos son:

$$A(2,\ 2) \qquad B(5,\ 7)$$

$$\overrightarrow{AB} = (5-2,\ 7-2) \qquad \overrightarrow{AB} = (3,\ 5)$$

Un vector $\overrightarrow{AB}$ tiene de componentes (5, −2). Hallar las coordenadas de A si se conoce el extremo B(12, −3).

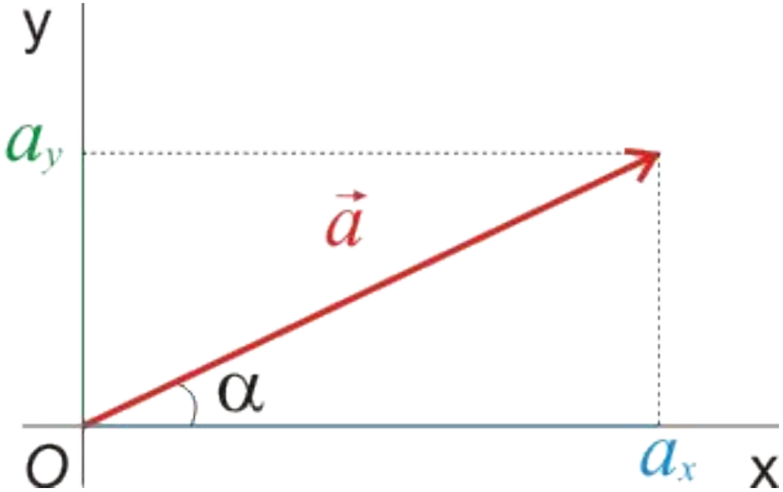
$$(12 - x_A,\ -3 - y_A) = (5,\ -2)$$

$$12 - x_A = 5 \qquad x_A = 7$$

$$A\,(7, -1)$$

$$-3 - y_A = -2 \qquad y_A = -1$$

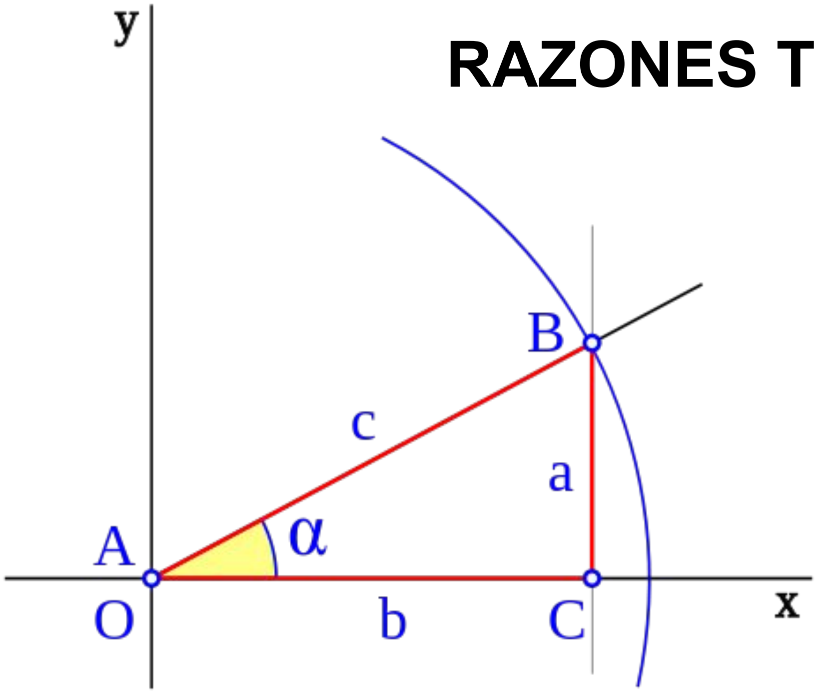
SISTEMA DE COORDENADAS



$$\vec{a} = (a, \alpha)$$

Las componentes cartesianas de un vector son las proyecciones de dicho vector sobre cada uno de los ejes. Y <u>están relacionadas con el ángulo que forma el vector con el eje *x* y con su longitud</u> (**módulo**), mediante las propiedades trigonométricas del **Triángulo Rectángulo**

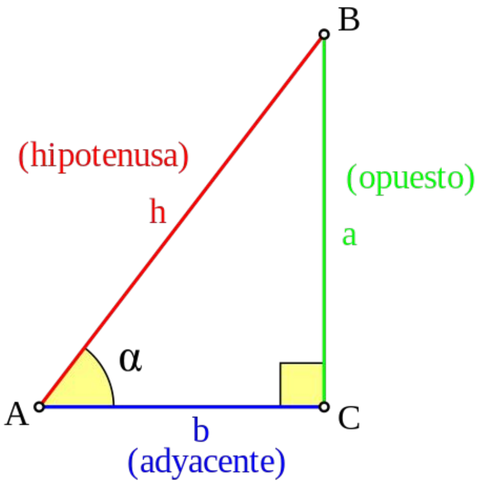
RAZONES TRIGONOMETRICAS



$$\sin\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$$

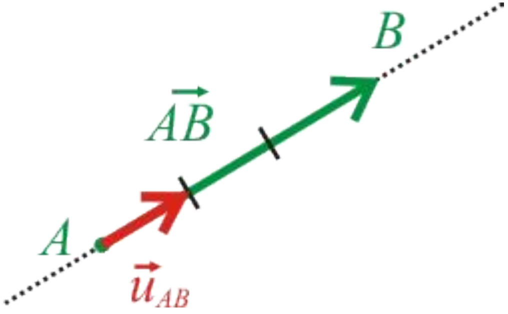
$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$

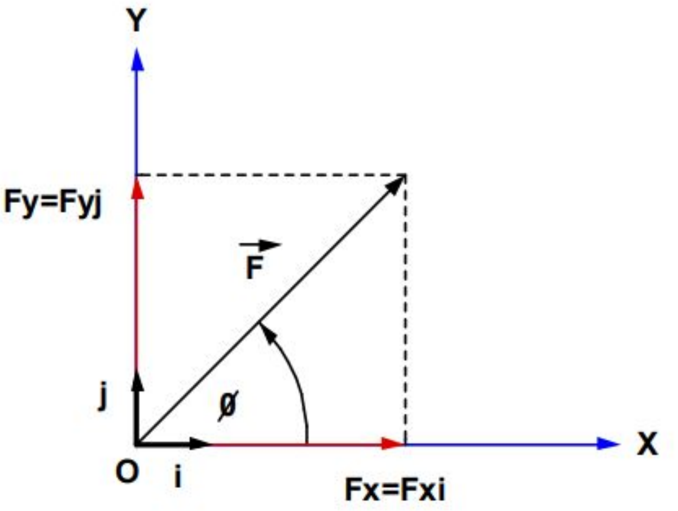
$$\tan\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}$$



VECTOR UNITARIO O VERSOR

Un **vector unitario** es aquél que tiene módulo 1.

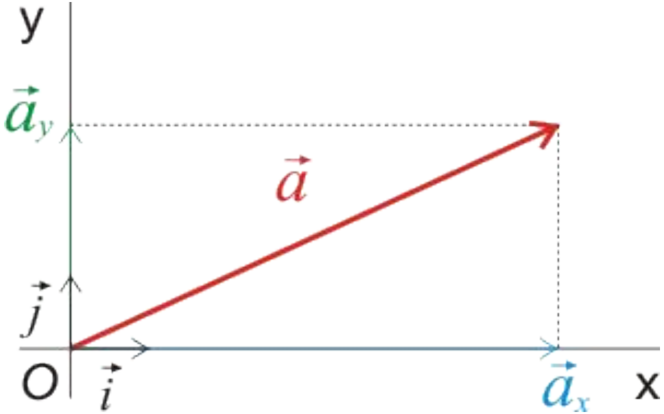


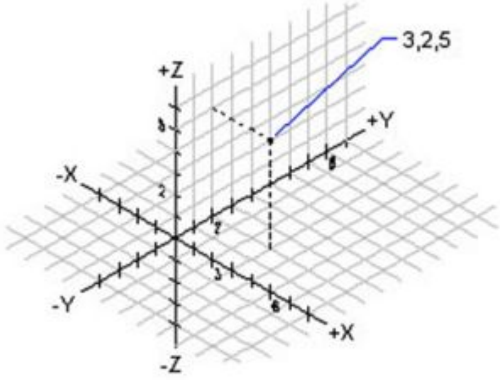


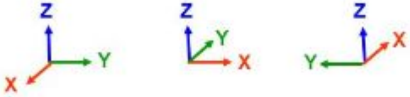
Para hallar un vector unitario a partir de cualquier vector, hay que dividir este último por su módulo.

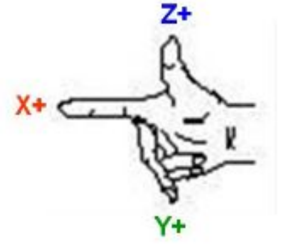
$$\vec{u}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} \qquad \left|\vec{u}_{AB}\right| = 1$$

VECTORES CARTESIANO

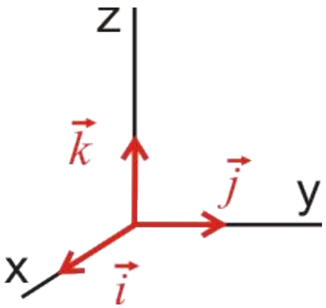


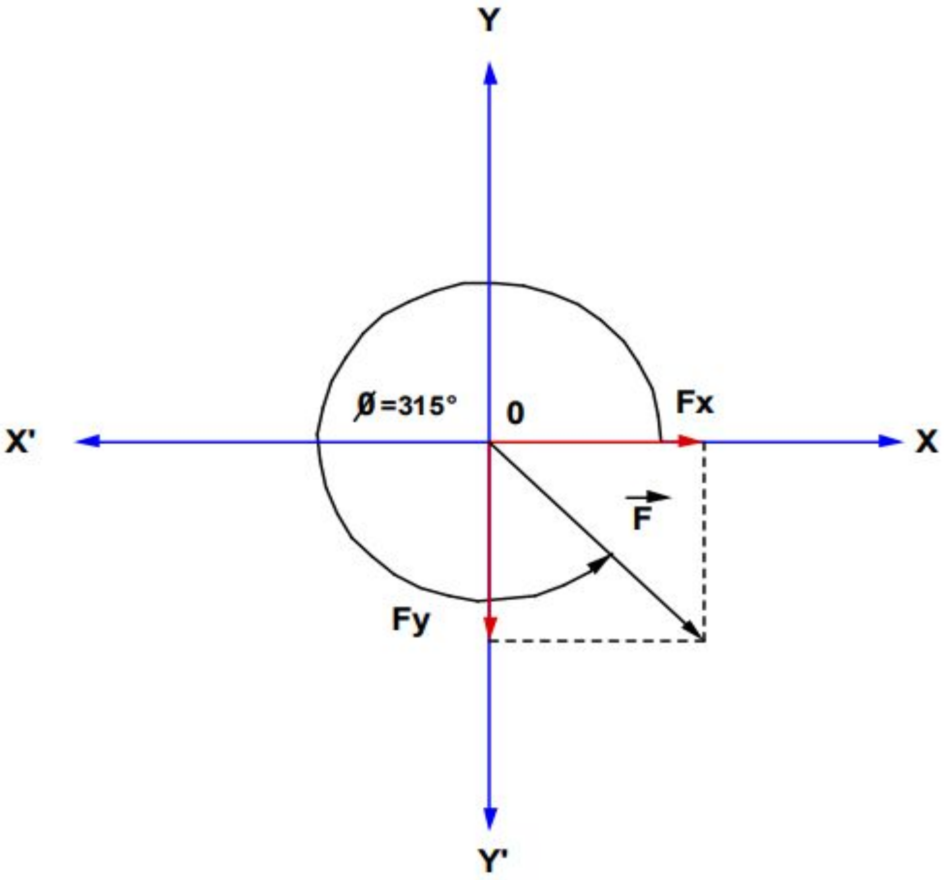






Regla de la mano derecha





Ejemplo:
Dado el vector $\vec{F}$=700N.
Determine componentes rectangulares analiticamente y expreselas como vectores unitarios

Datos:
Módulo $\vec{F}$=700N
Ángulo polar del vector=315º

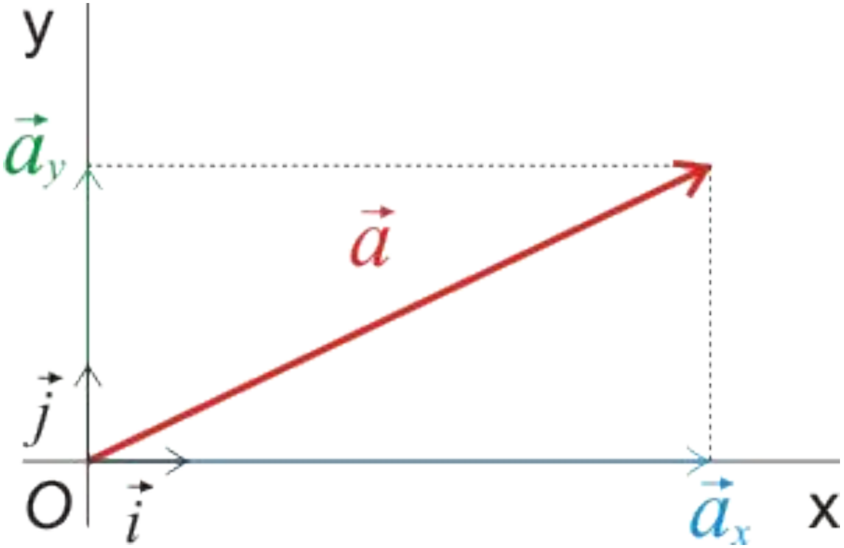
Componente horizontal Fx será Fx=F cos ***Φ***
Fx=700 cos 315º=**494.974N**

Componente horizontal Fy será Fy=F sen ***Φ***
Fy=700 sen 315º=**-494.974N**

Por tanto,
F = 494.974N*i* - 494.974N*j*

VECTORES CONSTITUYENTES DE UN VECTOR

Los vectores unitarios **i**, **j**, **k** definen los sentidos positivos de los ejes cartesianos.
Por tanto podemos expresar cualquier vector como la suma de sus vectores constituyentes



$\vec{a} = (a_x, a_y)$ Componentes cartesianas

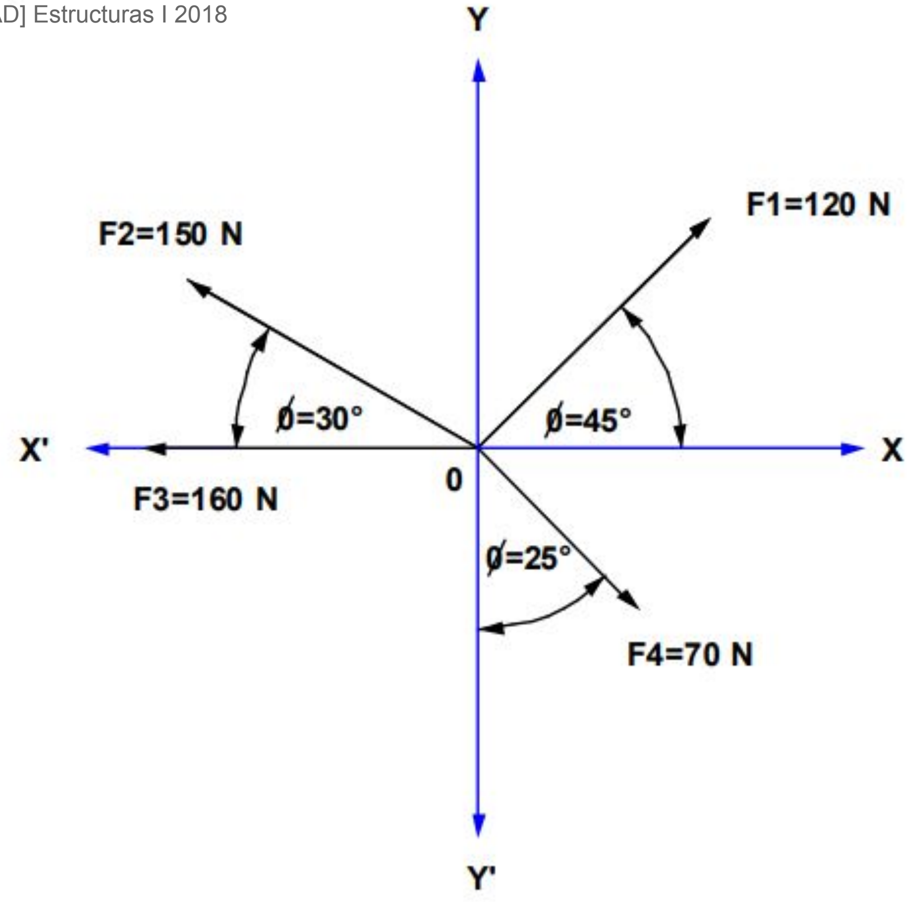
$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ en tres dimensiones

Según se observa en el gráfico

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}_x = a_x\vec{i} \\ \vec{a}_y = a_y\vec{j} \end{array}\right| \rightarrow \vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = \boxed{a_x\vec{i} + a_y\vec{j}}$$

en tres dimensiones

$$\boxed{\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}}$$

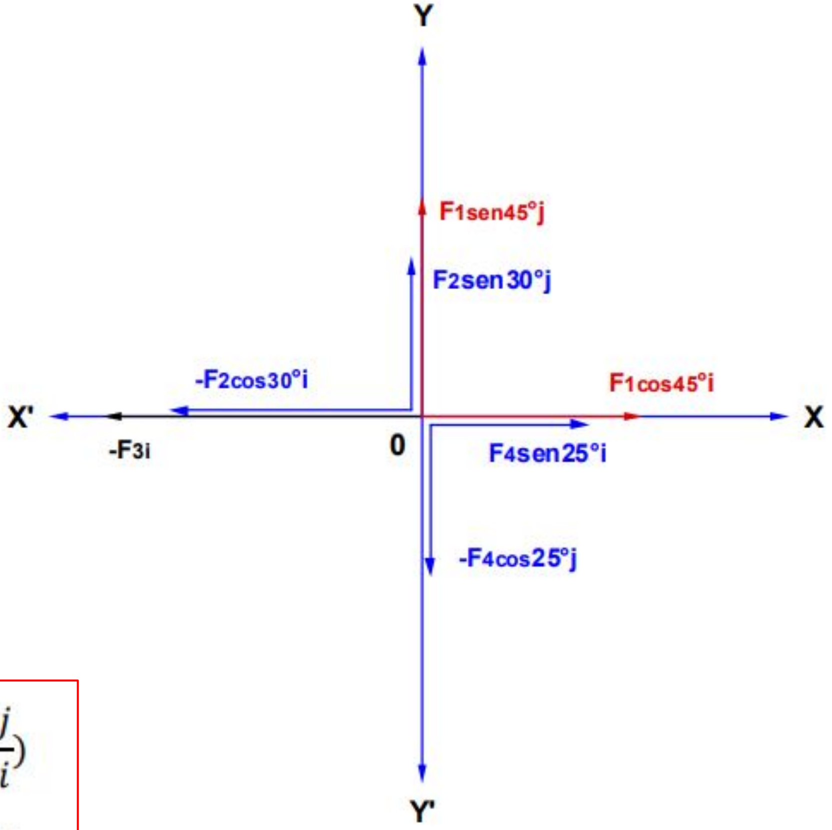


Ejemplo:
Encuentre la magnitud y el ángulo de dirección del vector resultante del sistema de fuerzas expuesto.

Datos:
Módulo del vector F1= 120N ;$\boldsymbol{\phi}$=45º
Módulo del vector F2= 150N ;$\boldsymbol{\phi}$=30º
Módulo del vector F3= 160N ;$\boldsymbol{\phi}$=180º
Módulo del vector F4= 70N ;$\boldsymbol{\phi}$=25º

Procedimiento analítico:
Representar únicamente las componentes rectangulares de cada vector, considerando su signo correspondiente de acuerdo a convención.

VECTOR	MAGNITUD (N)	COMPONENTES Fxi (N)	COMPONENTES Fyj (N)
F1	120	84.852	84.852
F2	150	-129.903	75.000
F3	160	-160.000	0
F4	70	29.583	-63.441
		∑Fxi = -175.468	∑Fyj = 96.411



R=-(175.468N)*i*+(96.411N)*j*

Por pitágoras

R=√(-175.468N)^2+(96.411N)^2

R=200.210N

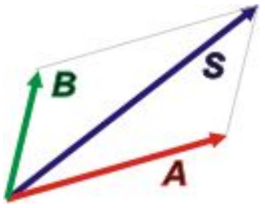
$$Ø = tang^{-1}\left(\frac{\sum Fyj}{\sum Fxi}\right)$$

$$Ø = tang^{-1}\left(\frac{96.411}{-175.468}\right)$$

***Φ*=- 28º,8**

SUMA DE VECTORES FORMA ANALITICA CONOCIENDO SUS COMPONENTES

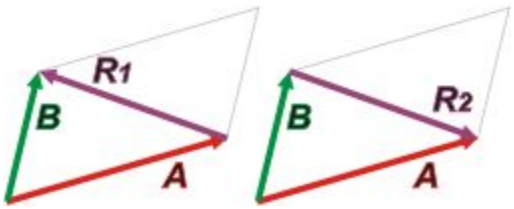
$$\vec{A}=(a_x,a_y) \qquad \vec{B}=(b_x,b_y)$$



$$\vec{S}=(a_x+b_x,\ a_y+b_y\ )$$

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{R2}=(a_x-b_x,\ a_y-\ b_y\ )$$

resta no conmutativa



$$\vec{B}-\vec{A}=\vec{R1}=(b_x-a_x,\ b_y-\ a_y\ )$$

EJEMPLO METODO ANALITICO

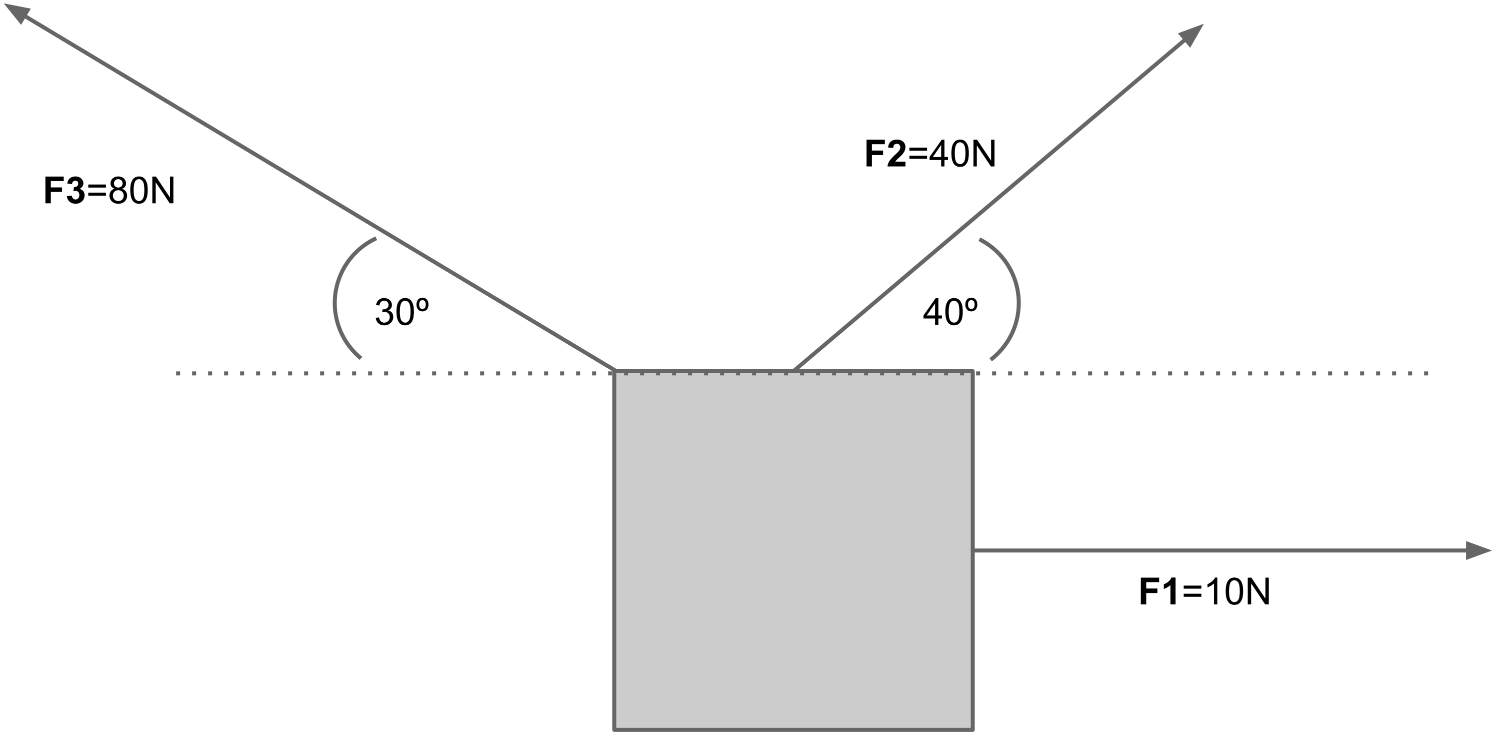
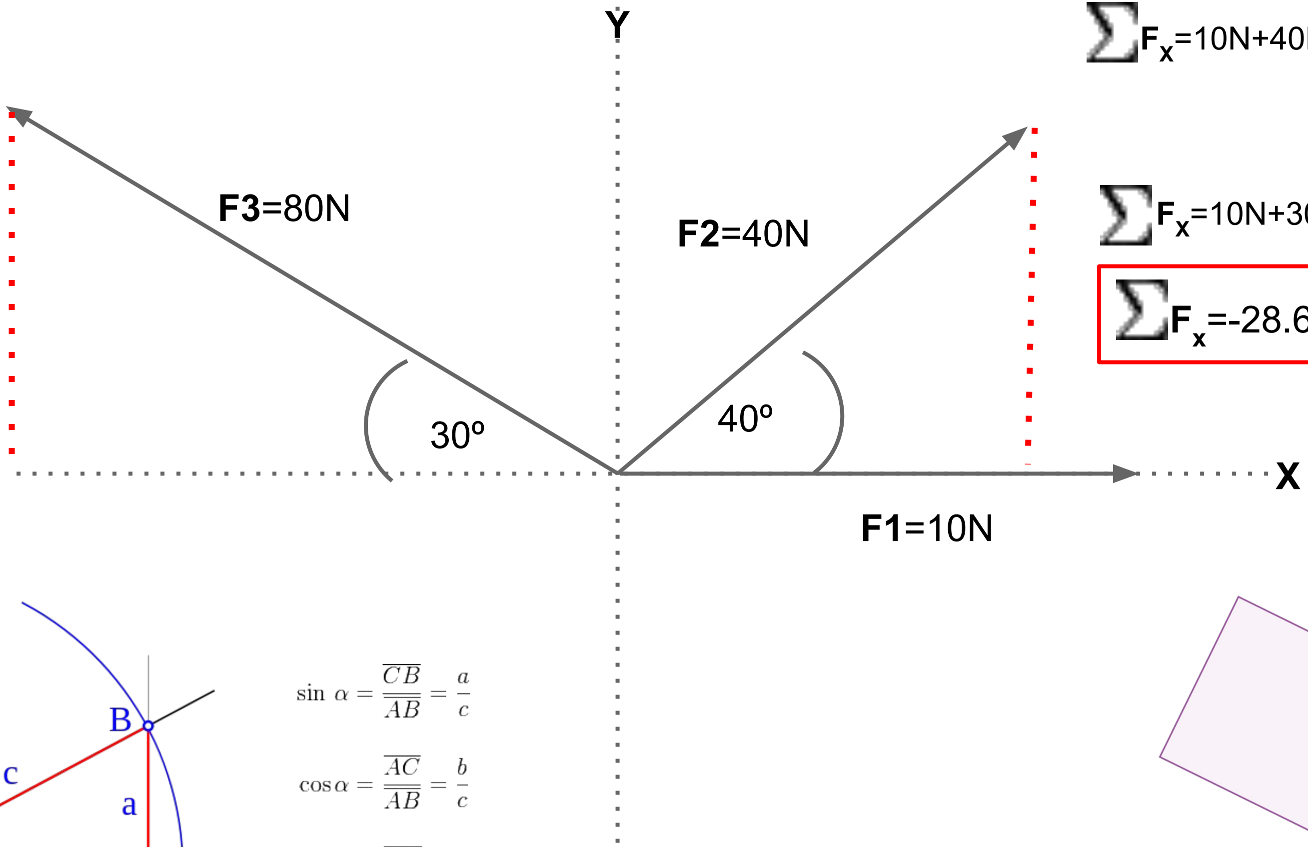


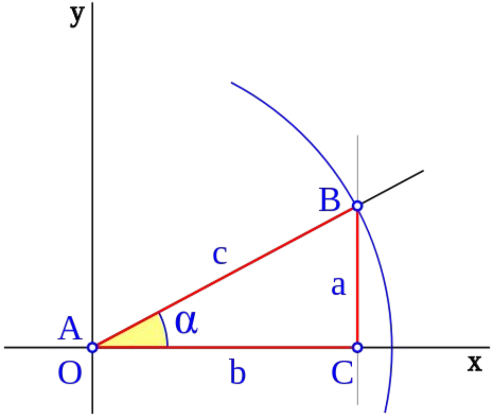
DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE



$$\sum F_x = 10N + 40N\cos(40º) - 80N\cos(30º)$$

$$\sum F_x = 10N + 30.64N - 69.28N$$

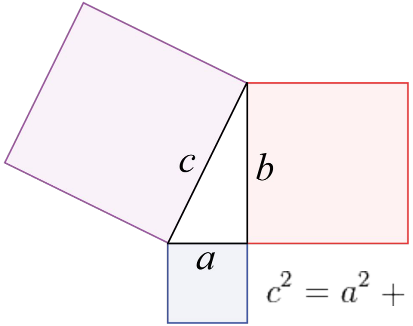
$$\boxed{\sum F_x = -28.64N}$$



$$\sin\ \alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$$

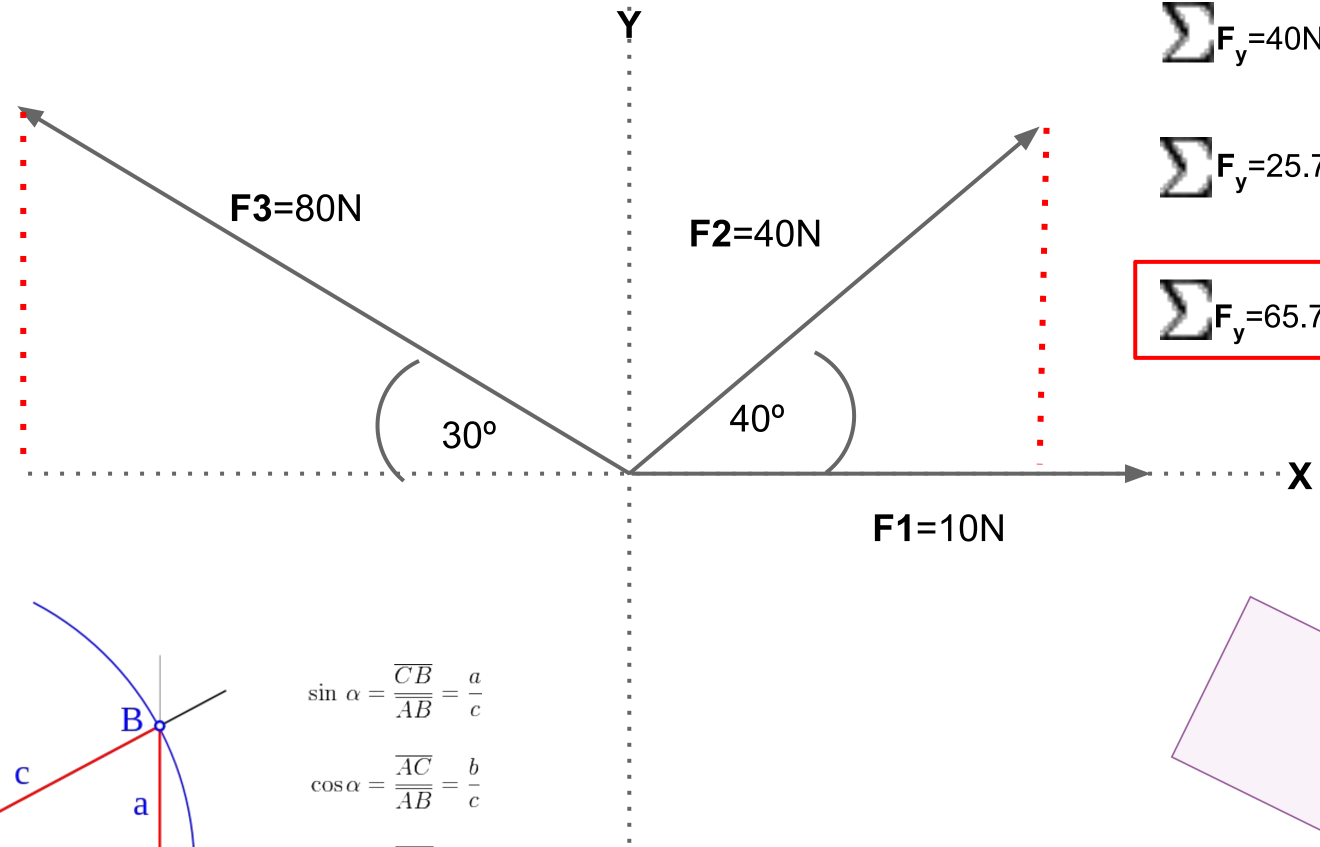
$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}$$



$$c^2 = a^2 + b^2$$

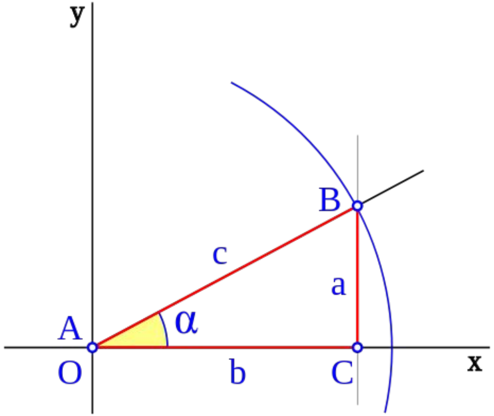
DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE



$$\sum F_y = 40N\,Sen(40º) + 80N\,Sen(30º)$$

$$\sum F_y = 25.71N + 40N$$

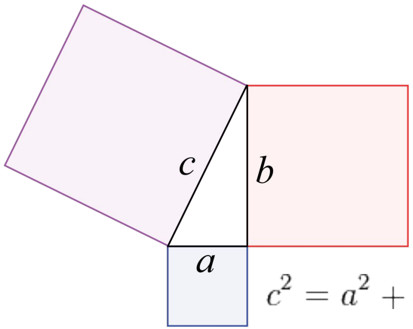
$$\boxed{\sum F_y = 65.7N}$$



$$\sin\ \alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}$$

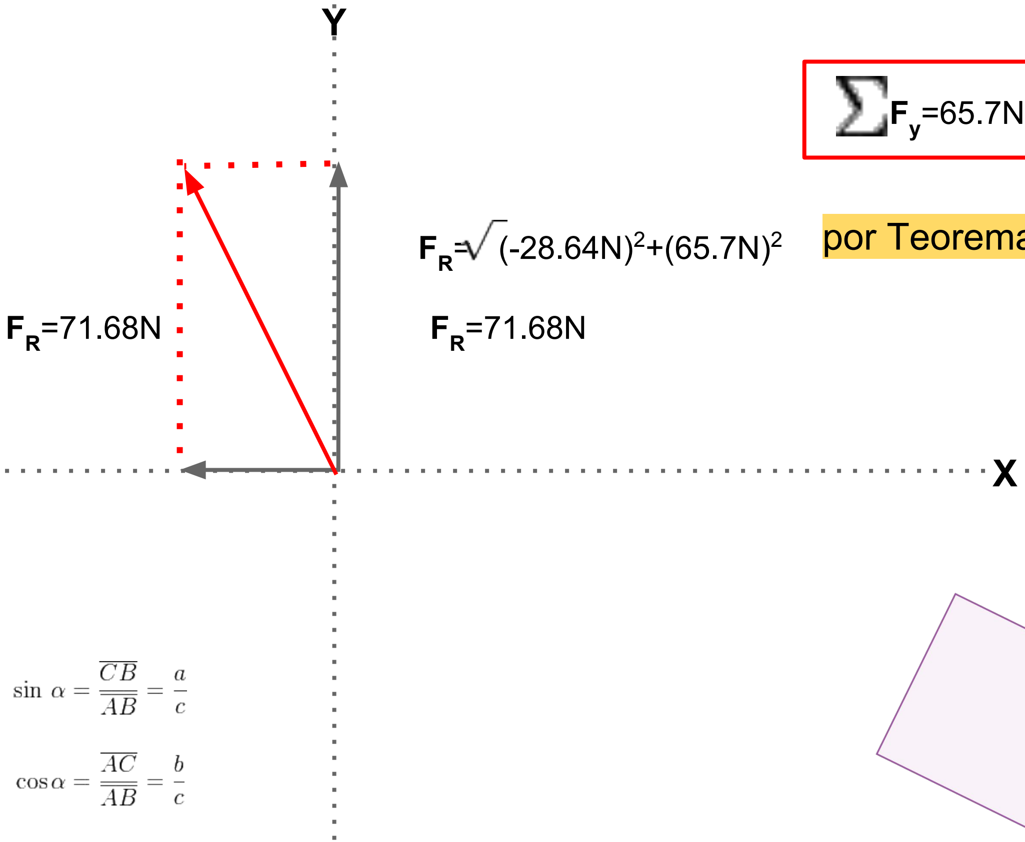


$$c^2 = a^2 + b^2$$

FUERZA RESULTANTE

$\sum F_x = -28.64N$

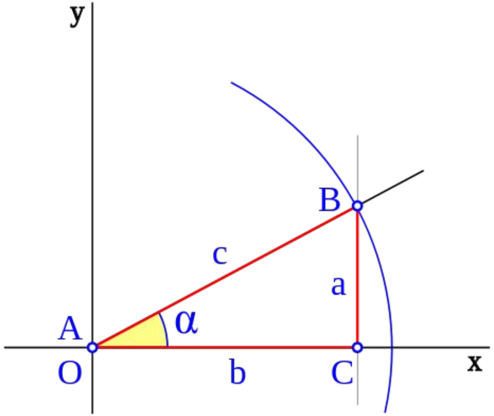
$\sum F_y = 65.7N$



$F_R = \sqrt{(-28.64N)^2 + (65.7N)^2}$

por Teorema de Pitagoras

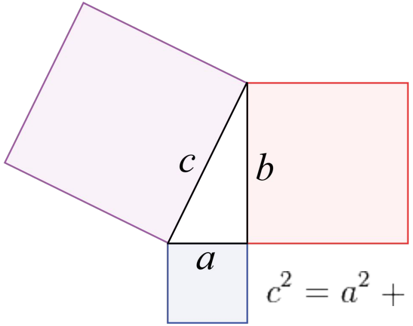
$F_R = 71.68N$



$$\sin \alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$$

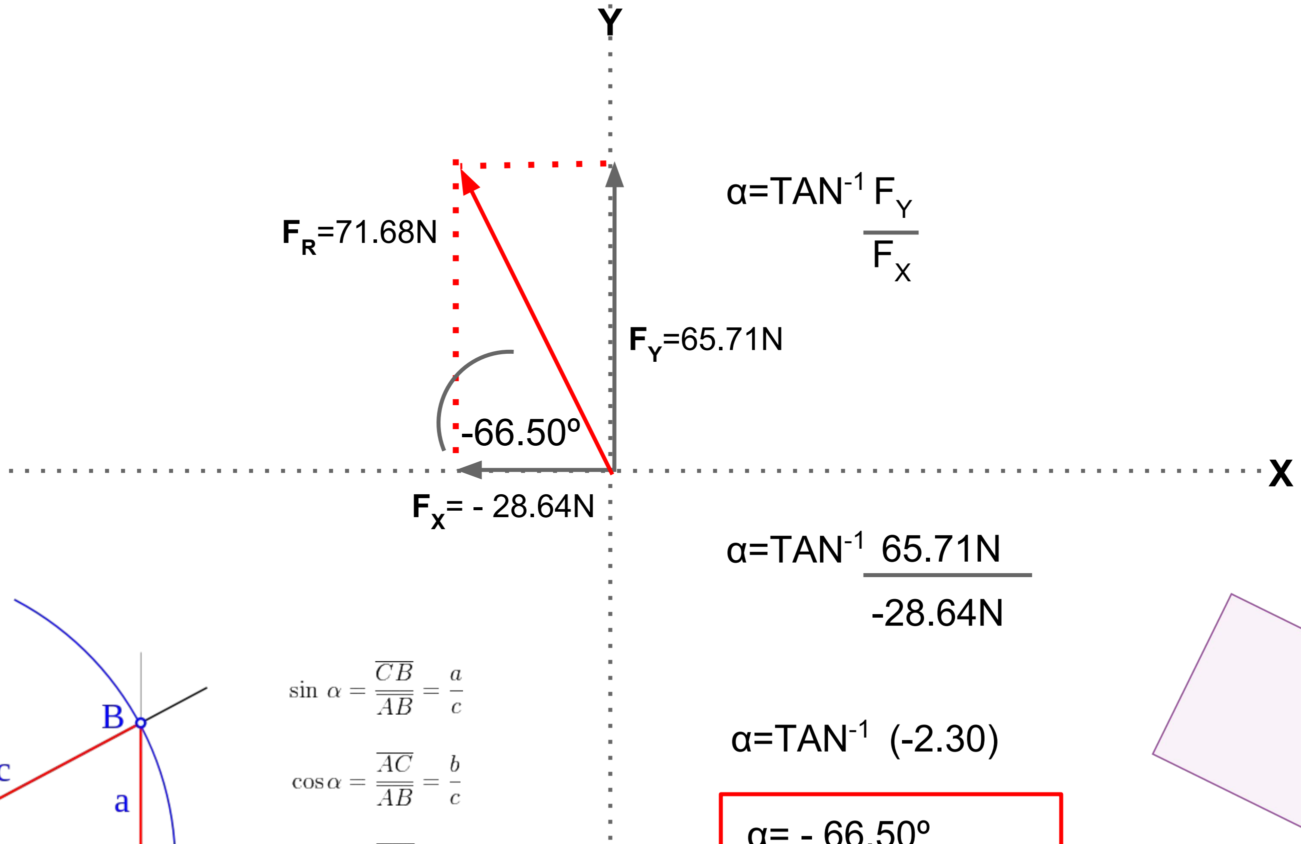
$$\cos \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}$$



$$c^2 = a^2 + b^2$$

DIRECCIÓN

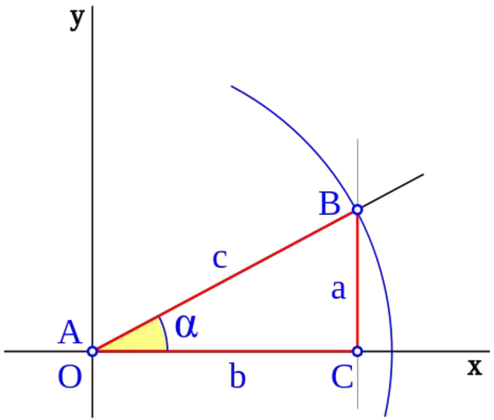


$$\alpha = \mathrm{TAN}^{-1}\ \frac{F_Y}{F_X}$$

$$\alpha = \mathrm{TAN}^{-1}\ \frac{65.71N}{-28.64N}$$

$$\alpha = \mathrm{TAN}^{-1}\ (-2.30)$$

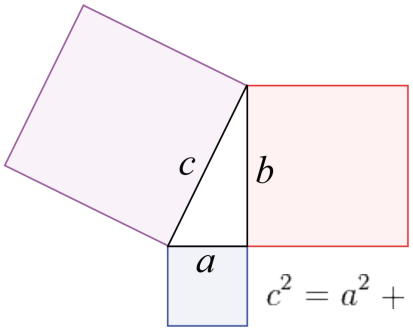
$$\boxed{\alpha = -\ 66.50º}$$



$$\sin\ \alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$

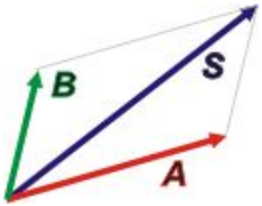
$$\tan\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}$$



$$c^2 = a^2 + b^2$$

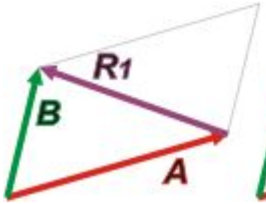
SUMA DE VECTORES
Métodos gráficos

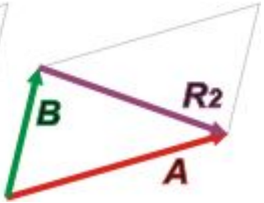
SUMA DE VECTORES
MÉTODO PARALELOGRAMO (sólo dos vectores)



Colocar los dos vectores que se desean sumar en un mismo origen, luego construir un paralelogramo (un cuadrilátero que posee sus lados no consecutivos paralelos) tomando como lados los dos vectores.

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{S}$$



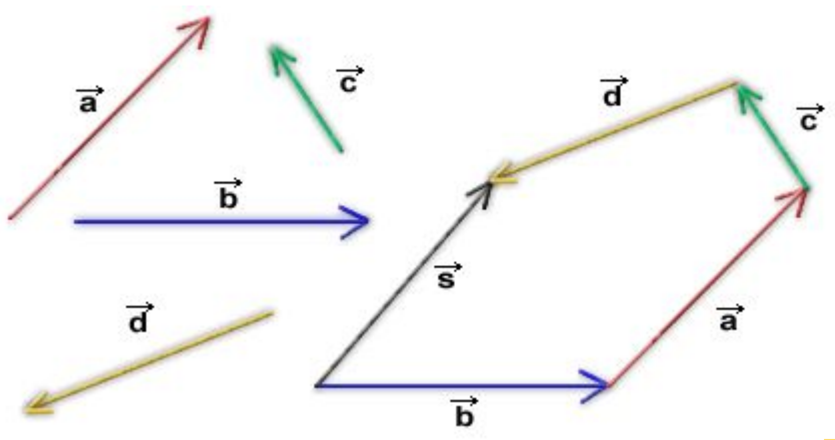


La otra diagonal se corresponde con la resta de los vectores. La resta no es conmutativa, con los vectores tampoco:

$$B - A = R_1$$

$$A - B = R_2$$

SUMA DE VECTORES
MÉTODO POLÍGONO (más de dos vectores)



$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{S}$$

(el orden no interesa, pues la suma es conmutativa)

Equilibrio y estabilidad

Fuerza neta=$\sum$ **F**i=0 (equilibrio traslacional)

Torque neto=$\sum$ **F**i=0 (equilibrio rotacional)

Fuerzas no equilibradas producen aceleraciones traslacionales.
Fuerzas equilibradas producen equilibrio traslacional.

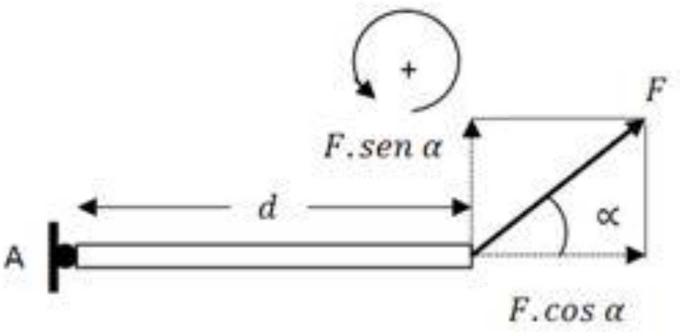
Momentos de fuerza no equilibrados producen aceleraciones rotacionales
Momentos de fuerza equilibrados producen equilibrio rotacional.

t Torque o Momento de Fuerza M

El momento de una fuerza F,denotado por **Mo** , con respecto a un punto de aplicación determinado O, es una magnitud vectorial, que se define como el **producto vectorial del vector de posición r del punto de aplicación de la fuerza, por la magnitud del vector fuerza**, también se lo conoce por momento o torque.

Torque o momento de una fuerza

El momento tiende a provocar una aceleración angular (cambio en la velocidad de giro) en el cuerpo sobre el cual se aplica



El torque de una fuerza oblicua se calcula:

1. Determinando el signo según lo convenido y multiplicando el valor del componente de la **fuerza perpendicular al eje mecánico** por la distancia que hay entre el centro de rotación y el punto de aplicación de la fuerza.

$$\tau F/A = F.(sen\ \alpha).d$$

TIPOS DE TORQUE

- **Torque positivo** Cuando gira en sentido antihorario.
- **Torque Negativo** Cuando gira en sentido horario.
- **Torque Máximo** Cuando la fuerza y el radio vector son perpendiculares. Mayor aprovechamiento de la Fuerza.
- **Torque Nulo** Cuando la fuerza pasa por el centro no genera torque.